УДК 517.54

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И НОРМА ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Ю. Граф[1]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Получены оценки логарифмических коэффициентов и производной Шварца в линейно- и аффинно-инвариантных семействах сохраняющих ориентацию гармонических отображений единичного круга. Доказываются оценки порядка семейства в терминах супремума норм производных Шварца в рассматриваемых семействах. Обсуждается связь данных результатов с достаточными условиями однолистности гармонических функций.

Ключевые слова: гармонические отображения, производная Шварца, линейно-инвариантные семейства.

Всякая локально однолистная сохраняющая ориентацию гармоническая в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \text{ где } h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \tag{1}$$

дилатация $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ аналитична и $|\omega(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$.

Классическая *производная Шварца* (шварциан) локально однолистной аналитической функции h (см., например, [1]) определяется как

$$S_h(z) = \left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)^2.$$

Попытки обобщить понятие производной Шварца на случай гармонических функций предпринимались неоднократно (см., например, [2, 3]). В частности в [3] Р. Эрнандез и М. Мартин предложили достаточно удачное определение производной Шварца для произвольных локально однолистных гармонических функций вида (1):

$$S_f(z) = \left(P_f(z)\right)_z - \frac{1}{2}\left(P_f(z)\right)^2,$$

где

$$P_f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln(|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2).$$

Данное определение сохраняет в силе основные свойства классической производной Шварца. *Норма шварциана* гармонической функции f определяется равенством

$$||S_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S_f(z)|(1-|z|^2)^2.$$

Семейство $\mathscr{L}$ локально однолистных сохраняющих ориентацию гармонических в $\mathbb{D}$ функций вида (1), т. ч. $a_0 = a_1 - 1 = 0$, называется *линейно-инвариантным* (л.и.с.), если для всякой функции $f \in \mathscr{L}$

$$\frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f_z(\phi(0))\phi'(0)} \in \mathscr{L} \ \forall\, \phi(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z},\ a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Семейство $\mathscr{L}$ называется *аффинно-инвариантным* (а.и.с.), если

$$\frac{f(z) + \varepsilon\overline{f(z)}}{1+\varepsilon b_1} \in \mathscr{L} \ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{D}.$$

Существенную роль в теории аффинно- и линейно-инвариантных семейств играет понятие *порядка семейства*, определенное Т. Шейл-Смоллом [4] как $\alpha = \sup_{f\in\mathscr{L}} |a_2|$. В [5] предложено понятие *уточненного порядка* а.л.и.с. $\mathscr{L}$:

$$\alpha_0 = \sup_{f\in\mathscr{L}^0} |a_2|,$$

где $\mathscr{L}^0 = \{f \in \mathscr{L} : b_1 = 0\}$. Уточненный порядок в некоторых случаях оказывается удобнее порядка α. Определим также $\beta_0 = \sup_{f\in\mathscr{L}^0} |b_2|$. Заметим, что $\alpha_0 \le \alpha$ и $\beta_0 \le 1/2$ для всякого а.л.и.с. $\mathscr{L}$.

Теорема 1 [6]. *Для любой функции $f \in \mathscr{L}$ и $z \in \mathbb{D}$*

$$|P_f(z)| \le 2\frac{\alpha_0 + |z|}{1-|z|^2}.$$

Оценка точна, например, в а.л.и.с. выпуклых или близких к выпуклым гармонических отображений.

Рассмотрим произвольное а.л.и.с. $\mathscr{L}$ и $f = h + \overline{g} \in \mathscr{L}^0$. Определим локально однолитсную аналитическую функцию $F_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon g(z)$ в $\mathbb{D}$ с произвольным значением ε, $|\varepsilon| \le 1$. Пусть

$$\Phi_\varepsilon(z) = \ln F'_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varepsilon) z^k.$$

Назовем $c_k(\varepsilon)$ *логарифмическими коэффициентами* f.

Теорема 2 [6]. *Пусть локально-однолистная гармоническая функция $f \in \mathscr{L}^0$ и $|\varepsilon| \le 1$. Тогда*

$$|c_k(\varepsilon)| \le \min_{r\in(0,1)} C_k(\varepsilon, r) < C_k\left(\varepsilon, \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right),$$

где

$$C_k(\varepsilon, r) = \frac{2}{kr^{k-2}(1-r^2)}\left\{\frac{\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|\varepsilon|}{1+r|\varepsilon|}}{r} - \frac{r}{\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|\varepsilon|}{1+r|\varepsilon|}}\right\}.$$

Теорема 2 позволяет оценить в $\mathscr{L}^0$ функционал Фекете-Сегё, который играет ключевую роль в оценке нормы шварциана гармонической функции f: для любой функции $f \in \mathscr{L}^0$ справедливо неравенство

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \le \frac{1}{3}\left(\alpha_0^2 + \min_{r\in(0,1)} C_2(0, r)\right).$$

Следствием этой оценки является

Теорема 3 [6]. *Для любой функции* $f \in \mathscr{L}$

$$||S_f|| \le 2\left(\alpha_0^2 + \min_{r\in(0,1)} C_2(0,r)\right) < 2\alpha_0^2 + 3\left(\sqrt{3}\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0 + \beta_0}\right).$$

Обратная задача заключается в оценке порядка а.л.и.с. $\mathscr{L}$, если известна оценка нормы производной Шварца в этом семействе. Данная задача важна для построения достаточных условий однолистности гармонических функций.

Теорема 4 [6]. *Пусть* $\mathscr{L}$ *– а.л.и.с. гармонических функций, причем существует константа* C *такая, что*

$$\sup_{f\in\mathscr{L}} |P_f(z)(1-|z|^2)| \le C + 2|z|.$$

Тогда $\alpha_0 \le \frac{C}{2}$, $\alpha \le \frac{C+1}{2}$.

Оценка точна, например, в семействе выпуклых гармонических отображений.

Аналогичный результат справедлив в терминах супремума норм шварциана в семействе $\mathscr{L}$.

Теорема 5 [6]. *Пусть* $\mathscr{L}$ *– а.л.и.с. гармонических функций, причем существует константа* C *такая, что*

$$\sup_{f\in\mathscr{L}} ||S_f|| \le C.$$

Тогда:

(i) для любой функции $f \in \mathscr{L}^0$

$$|a_3 - a_2^2| \le C/6$$

и для $f \in \mathscr{L}$

$$|a_3 - a_2^2| \le (C + 2\alpha_0 + 3/2)/6;$$

(ii) порядок семейства $\mathscr{L}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha \le (1 + \sqrt{8+2C})/2.$$

В сообщении предполагается обсудить приведенные выше результаты, а также некоторые связанные с ними, включая условия однолистности гармонической функции в терминах её производной Шварца.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Duren P. *Univalent functions*. – N. Y.: Springer-Verlag. – 1983. – 395 p.

2. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. *The Schwarzian derivative for harmonic mappings* // J. Anal. Math. – 2003. – V. 91. – P. 329–351.

3. Hernandez R., Martin M. J. *Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings* // J. Geom. Anal. – 2015. – V. 25. – № 1. – P. 64–91.

4. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* // J. London Math. Soc. – 1990. – V. 42. – P. 237–248.

5. Граф С. Ю. *Точная оценка якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* // Труды Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2007. – Вып. 14. – С. 31–38.

6. Graf S. Yu. *On the Schwarzian norm of harmonic mappings* // Проблемы анализа – Issues of Analysis. – 2016. – Т. 5(23). – № 2. – P. 20–32.

LOGARITHMIC COEFFICIENTS AND NORM
FOR SCHWARZIAN DERIVATIVE OF HARMONIC FUNCTIONS

S.Yu. Graf

Estimations of logarithmic coefficients and Schwarzian derivative in linear- and affine-invariant families of sense preserving harmonic mappings of the unit disk are obtained. As a converse, estimations of the order of family are proved in terms of supremum of Schwarzian norm over the family. Relations of this results with univalence of harmonic functions will be discussed.

Keywords: harmonic mappings, Schwarzian derivative, linear-invariant families.

УДК 517.54

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ ВЫПУКЛОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.Ю. Граф[1], Я.И. Самойлова[2]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

2 *yana-zavorygina@yandex.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Определяется гиперболический порядок выпуклости локально-однолистных функций. Доказываются теоремы регулярности убывания и роста гиперболического порядка выпуклости в классах однолистных конформных отображений единичного круга.

Ключевые слова: конформные отображения, порядок выпуклости, теоремы регулярности.

В геометрической теории функций комплексного переменного традиционно большое внимание уделяется выпуклым однолистным аналитическим функциям и многочисленным обобщениям понятия выпуклости (см., напр., [1, 2]).

Пусть f – локально однолистная аналитическая функция в единичном круге $\mathbb{D} \subset C$.

Порядком выпуклости функции f в круге $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $0 < r < 1$, называется число [1]

$$\beta(f,r) = \min_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{d}{d\theta} \mathtt{arg} \frac{df(re^{i\theta})}{d\theta} = \min_{|z|=r} \mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}.$$

Пусть $d_h(z_0, z)$ – гиперболическое расстояние между точками $z_0, z \in \mathbb{D}$ в круге $\mathbb{D}$, $\gamma_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) = \rho\}$ – окружность в $\mathbb{D}$ с гиперболическим центром z_0 и гиперболическим радиусом $\rho > 0$.